XXIV. NEMZETKÖZI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY
Szabadka, 2015. április 8-12.

X. évfolyam

1. A XXIV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny tiszteletére Frici rajzolt Szabadka főterére egy 24 oldalú szabályos sokszöget. Hány olyan egyenlő szárú háromszöget rajzolhatna, amelynek minden csúcsa ennek a sokszögnek egy csúcsa, és minden oldala ennek a sokszögnek egy átlója?

2. Ha $x, y, z \in \left[-3, 5\right]$**, akkor igazold, hogy**

$$\sqrt{5x-3y-xy+15}+\sqrt{5y-3z-yz+15}+\sqrt{5z-3x-xz+15}\le 12 .$$

Mikor állhat fenn az egyenlőség?

3. Hány olyan egyenlőszárú trapéz létezik, amelynek a kerülete 2015 **és az oldalak mérőszáma egész szám?**

4. Határozd meg mindazokat az a **valós számokat, melyekre az**

$$ax^2+\left(1-a^2\right)x-a>0$$

egyenlőtlenség egyetlen x **megoldására sem igaz, hogy** $|x|>2$**.**

5. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left|2x-57-2\cdot\sqrt{x-55}+\frac{1}{x-54-2\cdot\sqrt{x-55}}\right|=|1-x| .$$

6. Egy konvex négyszöget átlói négy háromszögre bontanak. Ha mind a négy háromszög területének a mértéke egész szám, akkor végződhet-e 2015**-re a négy terület mértékének szorzata? Lehet-e ez a szorzat olyan egész szám, amelynek utolsó négy jegye** 2015**, azaz lehet-e** $t_1\cdot t_2\cdot t_3\cdot t_4=\ldots 2015$**, ha** t_1, t_2, t_3, t_4 **jelöli a háromszögek területeinek mértékét?**

A feladatok kidolgozására 240 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A XXIV. NMMV FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – X. évfolyam

X/1. A XXIV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny tiszteletére Frici rajzolt Szabadka főterére egy 24 oldalú szabályos sokszöget. Hány olyan egyenlő szárú háromszöget rajzolhatna, amelynek minden csúcsa ennek a sokszögnek egy csúcsa, és minden oldala ennek a sokszögnek egy átlója?

(***Erdős Gábor, Nagykanizsa, Magyarország***)

Megoldás: Rögzítsük az egyik csúcsot, legyen ez a szárak metszéspontja. Számozzuk meg a csúcsokat úgy, hogy ez legyen az 1-es, a számozás pedig az óramutató járásának megfelelő irányban folyamatos. A szomszédos csúcsok nem lehetnek a háromszög alapjai, mert akkor a háromszög 2 oldala nem átló lesz, hanem oldal. De minden, az 1-es csúcsból induló átlóra merőleges átló igen. Ilyenek: 3-ból a 23-ba, 4-ből a 22-be, 5-ből a 21-be, …, 12-ből a 14-be. Ilyen átlóból 10 darab van. Ugyanez elmondható minden csúcsra, így kapunk $24 \cdot 10 = 240$ háromszöget. Mit számoltunk többször? A szabályos háromszögeket, azokat mindhárom csúcsuknál megszámoltuk. Mivel ilyen háromszögből 8 darab van (pl. az előbbi számozás szerint az 1, 9, 17 csúcsok által alkotott háromszög, illetve ennek elforgatottjai), így ezeket háromszor számoltuk, tehát kétszer ki kell vonni őket. A megfelelő háromszögek száma tehát $240 - 2 \cdot 8 = 224$.

X/2. Ha $x, y, z \in [-3, 5]$, akkor igazold, hogy

$$\sqrt{5x-3y-xy+15}+\sqrt{5y-3z-yz+15}+\sqrt{5z-3x-xz+15} \le 12.$$

Mikor állhat fenn az egyenlőség?

(***Kovács Béla, Szatmárnémeti, Erdély***)

Megoldás: A gyökjelek alatti kifejezések szorzattá alakíthatók:

$$\sqrt{(x+3)(5-y)}+\sqrt{(y+3)(5-z)}+\sqrt{(z+3)(5-x)} \le 12.$$

A feladat feltétele miatt az x, y, z valós számokra teljesül, hogy $x+3 \ge 0$, $5-x \ge 0$, $y+3 \ge 0$, $5-y \ge 0$, $z+3 \ge 0$ és $5-z \ge 0$, tehát a gyökös kifejezések értelmezettek.
Alkalmazzuk mindegyik gyökös kifejezésre a számtani és mértani középarányosok közötti összefüggést. Ekkor

$$\sqrt{(x+3)(5-y)} \le \frac{x+3+5-y}{2},$$

$$\sqrt{(y+3)(5-z)} \le \frac{y+3+5-z}{2},$$

$$\sqrt{(z+3)(5-x)} \le \frac{z+3+5-x}{2}$$

Összeadva a fenti egyenlőtlenségeket megkapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget, azaz

$$\sqrt{(x+3)(5-y)}+\sqrt{(y+3)(5-z)}+\sqrt{(z+3)(5-x)} \le$$

$$\le \frac{x+3+5-y}{2}+\frac{y+3+5-z}{2}+\frac{z+3+5-x}{2}=\frac{24}{2}=12.$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha a zárójeleken belül levő kifejezések megegyeznek, azaz ha $x+3=5-y$, $y+3=5-z$ és $z+3=5-x$, ez pedig az $x=y=z=1$ eset.

X/3. Hány olyan egyenlőszárú trapéz létezik, amelynek a kerülete 2015 **és az oldalak mérőszáma egész szám?**

(*Szabó Magda, Szabadka, Vajdaság*)

I.Megoldás: Legyenek az oldalak rendre a, c, b, c, ahol $a, b, c \in Z^+$ és legyen $a > b$. Ekkor érvényes az $a < c + b + c$ egyenlőtlenség és a feladat feltétele alapján

$$a < \frac{a+b+2c}{2} = \frac{2015}{2}.$$

Az a valamely rögzített értékére az $\{1, 2, 3, \ldots, 1007\}$ halmazból a b értéke bármely a-nál kisebb érték lehet, de paritásban különbözőek kell hogy legyenek. Ennek alapján a lehetőségek száma $\left[\frac{a}{2}\right]$, ekkor a c értéke egyértelmű és a trapéz is egyértelműen meghatározott az oldalaival. A trapézok keresett száma:

$$\sum_{a=1}^{1007}\left[\frac{a}{2}\right] = 0+1+1+2+2+\cdots+502+502+503+503 = 2\cdot\frac{504\cdot 503}{2} = 253512.$$

II.Megoldás: Jelölje a a trapéz rövidebb alapját, c a szárakat, a hosszabb alap pedig az ábra alapján legyen

$$b + a + b = a + 2b.$$

Ekkor $2a + 2b + 2c = 2015$, ahonnan

$$a + b + c = 1007.5.$$

Mivel $b < c$ és $a, c \in Z^+$, vehetjük, hogy

$$b = d - 0.5, \text{ ahol } d \in Z^+.$$

Most teljesül, hogy

$$a + c + d = 1008 \text{ és } a \geq 1, \text{ ahonnan } c + d \leq 1007.$$

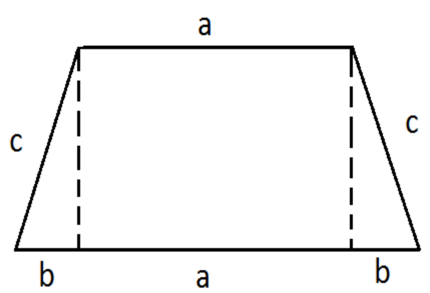
A feladat feltételeivel ekkor ekvivalens az, hogy $d \leq c$, $c, d \in Z^+$ és $c + d \leq 1007$.

Mivel $2d \leq c + d \leq 1007$, így $d \leq 503$.

Ha $d \in \{1, 2, 3, \ldots, 503\}$, akkor $c \in \{d, d+1, \ldots, 1007 - d\}$.

A trapézok keresett száma tehát

$$\sum_{d=1}^{503}(1007 - d - d + 1) = \sum_{d=1}^{503}(1008 - 2d) = 503\cdot 1008 - 2\cdot\frac{503\cdot 504}{2} = 503\cdot 504 = 253512.$$



X/4. Határozd meg mindazokat az a valós számokat, melyekre az

$$ax^2+\left(1-a^2\right)x-a>0$$

egyenlőtlenség egyetlen x megoldására sem igaz, hogy $|x|>2$.

(*Csikós Pajor Gizella, Szabadka, Vajdaság*)

Megoldás: Ha egyetlen x megoldásra sem igaz, hogy $|x|>2$, akkor minden x megoldásra igaz, hogy $|x|\le 2$ vagyis, hogy $-2\le x\le 2$.

Az $ax^2+\left(1-a^2\right)x-a=0$ egyenlet $a\neq 0$ esetén másodfokú, és gyökei az $x_{1/2}=\dfrac{-1+a^2\pm\left(1+a^2\right)}{2a}$ számok, ahonnan $x_1=-\dfrac{1}{a}$ és $x_2=a$.

1. Ha $a=0$, akkor az $x>0$ egyenlőtlenséget kapjuk, amely halmazban van olyan x amelyre $|x|>2$, így $a\neq 0$.

2. Ha $a>0$, akkor a megfelelő parabolának minimuma van (felfelé nyíló) és akkor pozitív, amikor $x<-\dfrac{1}{a}$ vagy $x>a$. Mivel bármely $a>0$ esetén található olyan x a megoldáshalmazból, amelyre $|x|>2$, így $a>0$ sem lehetséges.

3. Ha $a<0$, akkor a megfelelő parabolának maximuma van (lefelé nyíló) és akkor pozitív, amikor $a<x<-\dfrac{1}{a}$. Ha az $a<x<-\dfrac{1}{a}$ feltétel mellett $-2\le x\le 2$ is érvényes, akkor $a\ge -2$ és $-\dfrac{1}{a}\le 2$, illetve $a\le -\dfrac{1}{2}$ kell, hogy teljesüljön.

Ezek szerint a keresett a számokra a $-2\le a\le -\dfrac{1}{2}$ feltétel kell hogy teljesüljön.

X/5. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left|2x-57-2\cdot\sqrt{x-55}+\frac{1}{x-54-2\cdot\sqrt{x-55}}\right|=|1-x|.$$

(*Bíró Bálint, Eger, Magyarország*)

Megoldás: A négyzetgyökös kifejezés akkor értelmezett, ha $x\ge 55$. Először az egyenletet a következő alakra hozzuk:

$$\left|x-54-2\cdot\sqrt{x-55}+\frac{1}{x-54-2\cdot\sqrt{x-55}}+x-3\right|=|1-x|.$$

Vezessük be az $x-54-2\cdot\sqrt{x-55}=a$ helyettesítést. Az egyenletben szereplő tört nevezője miatt nyilvánvaló, hogy $a\neq 0$. Könnyen belátható, hogy

$$a=\left(1-\sqrt{x-55}\right)^2,$$

ez pedig azt jelenti, hogy csak $a>0$ állhat fenn.

Ezzel a jelöléssel az eredeti egyenlet:

$$\left|a+\frac{1}{a}+x-3\right|=|1-x|$$

alakba írható, amelyből két lehetséges esetet írhatunk fel:

(A) $$a+\frac{1}{a}+x-3=1-x,$$

vagy

$$\text{(B)} \qquad a+\frac{1}{a}+x-3=x-1.$$

Az (A) egyenletből $a+\frac{1}{a}=4-2x$ következik, ez azonban az $x \geq 55$ és az $a>0$ feltételek mellett nem teljesülhet, hiszen az egyenlet két oldalának előjele eltérő. Ezért az (A) egyenletnek nincs megoldása.

A (B) egyenletből azt kapjuk, hogy $a+\frac{1}{a}=2$. Ismeretes a pozitív számokra vonatkozó $a+\frac{1}{a} \geq 2$ nevezetes egyenlőtlenség, amelyben az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a=1$.

Az $a=\left(1-\sqrt{x-55}\right)^2$ összefüggés szerint tehát: $\left(1-\sqrt{x-55}\right)^2=1$.

Ez az egyenlőség ismét kétféleképpen lehetséges:

$$\text{(C)} \qquad 1-\sqrt{x-55}=1,$$

vagy

$$\text{(D)} \qquad 1-\sqrt{x-55}=-1.$$

A (C) egyenlet megoldása $x=55$, a (D) egyenlet megoldása pedig $x=59$.

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy ezek a számok valóban kielégítik az eredeti egyenletet, ezért a feladat megoldáshalmaza $M=\{55,59\}$.

X/6. Egy konvex négyszöget átlói négy háromszögre bontanak. Ha mind a négy háromszög területének a mértéke egész szám, akkor végződhet-e 2015-re a négy terület mértékének szorzata? Lehet-e ez a szorzat olyan egész szám, amelynek utolsó négy jegye 2015, azaz lehet-e $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 = \ldots 2015$, ha t_1, t_2, t_3, t_4 jelöli a háromszögek területeinek mértékét?

(*Katz Sándor, Bonyhád, Magyarország*)

Megoldás: Legyenek a négyszög csúcsai A, B, C, D, az átlók metszéspontja pedig E.

Az átlók behúzásával keletkezett négy háromszög területe legyen t_1, t_2, t_3 és t_4.

Az ABE és AED háromszögek magassága ugyanaz, ezért területeik aránya $t_1 : t_4 = BE : ED$. Ugyanígy a CBE és CED háromszögekre megkapható, hogy $t_2 : t_3 = BE : ED$. A két egyenlőségből $t_1 \cdot t_3 = t_2 \cdot t_4$ adódik.

(Ezzel beláttuk, hogy egy konvex négyszög átlói által meghatározott négy háromszög területe közül két-két szemközti szorzata egyenlő.)

Eszerint a négy háromszög területének szorzata: $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 = (t_1 \cdot t_3)^2$.

Mivel t_1, t_2, t_3, t_4 egész számok, így szorzatuk az előzőek szerint négyzetszám.

Viszont ha egy négyzetszám 5-re végződik, akkor utolsó előtti jegye 2, hiszen

$$(10k+5)^2 = 100k^2 + 100k + 25,$$

az első két tag összege két 0-ra, az egész összeg 25-re végződik.

A négy terület mértékének szorzata tehát nem végződhet 2015-re.