XXIV. NEMZETKÖZI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY

Szabadka, 2015. április 8-12.

<u>XII. évfolyam</u>

1. A szabályos hatoldalú csonka gúla alapélei a és b ($a>b$). A csonka gúla oldalfelülete megegyezik az alaplapok területének összegével. Határozd meg a csonka gúla magasságát!

2. Egy 9x9-es négyzetrácsba beírtuk a számokat 1-től 81-ig. Bizonyítsd be, hogy a számok bármely elrendeződése mellett van két olyan szomszédos négyzet, amelyben a számok közötti különbség legalább 6. (Szomszédosnak tekintjük azokat a négyzeteket, amelyeknek közös oldaluk van.)

3. Ha α hegyesszög, akkor bizonyítsd be, hogy teljesül az

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\geq 3+2\sqrt{2}$$

egyenlőtlenség!

4. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$(2x+1)\sqrt{(2x-1)^3}+16x^4=2x(4x-1).$$

5. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$2x^2+\sqrt{2}+\log_2^2\left(2x^2+\sqrt{2}\right)=2^{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}}+\frac{x^2+1}{\left(x^2+2\right)^2}.$$

6. Egy $42\,cm$ és egy $58\,cm$ hosszú szakasz α szög alatt metszi egymást. Mekkora a szakaszok végpontjaival (mint csúcsokkal) alkotott négyszög pontos területe, ha $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{7}$?

A feladatok kidolgozására 240 perc áll rendelkezésre.

Jó munkát!

A XXIV. NMMV FELADATAINAK MEGOLDÁSAI – XII.évfolyam

XII/1. A szabályos hatoldalú csonkagúla alapélei a és b ($a>b$). A csonka gúla oldalfelülete megegyezik az alaplapok területének összegével. Határozd meg a csonka gúla magasságát!

(*Angyal Andor, Szabadka, Vajdaság*)

Megoldás: Mivel a csonkagúla oldalfelülete megegyezik az alaplapok területének összegével, ezért

$$6\cdot\frac{(a+b)h}{2}=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+6\cdot\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

ahol h a csonkagúla oldalmagassága. Rendezés után azt kapjuk, hogy

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

Ha H-val jelöljük a csonkagúla testmagasságát, akkor a Pitagorasz-tétel alkalmazásával a

$$h^2=H^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

egyenlőséghez jutunk, ahonnan a következő módon kapjuk meg a keresett magasságot:

$$H^2=h^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\cdot\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{(a+b)^2}-\frac{3}{4}(a-b)^2=\frac{3}{4}\cdot\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}.$$

Gyökvonás után adódik, hogy $H=\dfrac{ab\sqrt{3}}{a+b}$.

XII/2. Egy 9×9-es négyzetrácsba beírtuk a számokat 1-től 81-ig. Bizonyítsd be, hogy a számok bármely elrendeződése mellett van két olyan szomszédos négyzet, amelyben a számok közötti különbség legalább 6. (Szomszédosnak tekintjük azokat a négyzeteket, amelyeknek közös oldaluk van.)

(*Béres Zoltán, Szabadka, Vajdaság*)

Megoldás: Tekintsük azt a két négyzetet, amelybe az 1-es és a 81-es van beírva, és keressük a legrövidebb utat a szomszédos négyzeteken keresztül a két szám között. Figyeljük meg, hogy ezen az úton, hány „lépéssel” tudunk végigmenni.

1. eset. Az 1-es és a 81-es a két átellenes sarokban van. Ekkor a legrövidebb út a két négyzet között 16 lépésből áll (8 jobbra és 8 balra), és létezik két ilyen út is, amelyeknek nincs közös négyzetük.

Ha feltesszük, hogy nincs 5-nél nagyobb különbség a szomszédos mezők között, akkor az út négyzeteibe írt egyetlen lehetséges számsor az 1,6,11,16,21,…,71,76,81, ahol a szomszédos számok közötti különbség mindig 5. Ekkor a másik út, mely ezeket a számokat nem tartalmazhatja, szükségképpen tartalmaz egy 5-ösnél nagyobb lépést, mivel a második szám csak 6-nál kisebb lehet, és a további lehető legnagyobb, 5-ös lépésekkel sem érheti el a 81-et.

2. eset. Az 1-es és a 81-es nem a két átellenes sarokban van. Ekkor a legrövidebb út a két négyzet között rövidebb, mint 16 lépés. Ha feltesszük, hogy nincs 5-nél nagyobb különbség a szomszédos mezők között, akkor legfeljebb 15 lépésből az elérhető legnagyobb szám a 76, így nem érhetjük el a 81-et.

XII/3. Ha α hegyesszög, akkor bizonyítsd be, hogy teljesül az

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\geq 3+2\sqrt{2}$$

egyenlőtlenség!

(*Csikós Pajor Gizella, Szabadka, Vajdaság*)

Megoldás: Végezzük el a következő átalakításokat, alkalmazva a számtani és mértani közepek közötti összefüggést, valamint azt, hogy $|\sin x|\leq 1$:

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)=1+\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\right)+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\geq$$

$$\geq 1+\frac{2}{\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}}+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}}\right)^2=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sin\alpha\cos\alpha}}\right)^2=$$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\alpha}}\right)^2\geq\left(1+\sqrt{2}\right)^2=1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}.$$

XII/4. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$(2x+1)\sqrt{(2x-1)^3}+16x^4=2x(4x-1).$$

(*Olosz Ferenc, Szatmárnémeti, Erdély*)

I.Megoldás: Az egyenlet értelmezett, ha $x\in\left[\frac{1}{2},\infty\right)$.

Az egyenletet balra rendezzük, majd 1 hozzáadásával és kivonásával a

$$(2x-1)+(2x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1}+\left(16x^4-8x^2+1\right)=0\text{, illetve}$$

$$\left(\sqrt{2x-1}\right)^2+\left(4x^2-1\right)\sqrt{2x-1}+\left(4x^2-1\right)^2=0$$

alakra hozzuk.

A valós számok halmazán az $a^2\pm ab+b^2=0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a=b=0$. Esetünkben keressük a $\sqrt{2x-1}=0$ és $4x^2-1=0$ egyenletek közös megoldását és ez $x=\frac{1}{2}$.

II.Megoldás: Az egyenlet értelmezett, ha $2x-1\geq 0$, vagyis $x\in\left[\frac{1}{2},\infty\right)$.

Alkalmazzuk az egyenletre a következő ekvivalens átalakításokat:

$$(2x-1)+(2x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1}+\left(16x^4-8x^2+1\right)=0,$$

$$(2x-1)+(2x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1}+\left(4x^2-1\right)^2=0,$$

$$(2x-1)+(2x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1}+(2x-1)^2(2x+1)^2=0,$$

$$(2x-1)\left[1+(2x+1)\sqrt{2x-1}+(2x-1)(2x+1)^2\right]=0.$$

Minden $x\in\left[\frac{1}{2},\infty\right)$ esetén $1+(2x+1)\sqrt{2x-1}+(2x-1)(2x+1)^2\geq 1$, tehát csak $2x-1=0$ lehetséges, azaz $x=\frac{1}{2}$.

XII/5. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$2x^2+\sqrt{2}+\log_2^2\left(2x^2+\sqrt{2}\right)=2^{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}}+\frac{x^2+1}{\left(x^2+2\right)^2}\,.$$

(*Bence Mihály, Brassó, Erdély*)

Megoldás: Mivel nemnegatív értékekre az $f(x)=2^x+x^2$ függvény szigorúan monoton növekvő, ezért nemnegatív értékekre injektív is. Felhasználva ezt a jelölést az adott egyenlet ekvivalens a

$$f\left(\log_2\left(2x^2+\sqrt{2}\right)\right)=f\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}\right)$$

egyenlettel, ahonnan az f függvény injektív tulajdonsága miatt következik, hogy

$$\log_2\left(2x^2+\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}.$$

Mivel $\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2\geq 0$, ahonnan következik

$$x^2+1-2\sqrt{x^2+1}+1\geq 0,$$

valamint

$$x^2+2-2\sqrt{x^2+1}\geq 0,$$

illetve a

$$2\sqrt{x^2+1}\leq x^2+2$$

egyenlőtlenség, így érvényes, hogy

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}\leq\frac{1}{2}\text{ és }\log_2\left(2x^2+\sqrt{2}\right)\geq\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}.$$

Ebből adódik, hogy csak a $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}=\frac{1}{2}$ egyenlőség lehetséges.

Ekvivalens átalakításokkal megkapjuk, hogy

$$2\sqrt{x^2+1}=x^2+2,$$

ahonnan négyzetre emelve mindkét oldalt a

$$4\left(x^2+1\right)=\left(x^2+2\right)^2$$

egyenlet következik. Elvégezve a műveleteket, majd rendezve a kapott kifejezést adódik, hogy

$$4x^2+4=x^4+4x^2+4,$$

illetve $x^4=0$, amely egyenlet egyetlen megoldása $x=0$.

XII/6. Egy $\overline{AB} = 42\ cm$ és egy $\overline{CD} = 58\ cm$ hosszú szakasz α szög alatt metszi egymást az O pontban. Mekkora a szakaszok végpontjaival (mint csúcsokkal) alkotott $ACBD$ négyszög pontos területe, ha tudjuk, hogy $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{7}$?

(*Gecse Frigyes, Kisvárda, Magyarország*)

Megoldás: Legyenek E, F, G, H az $ACBD$ négyszög oldalainak felezőpontjai.
A megszámozott alakzatok területét jelöljük t-vel, megfelelő indexszel ellátva. A keresett t_{ACBD} területre fennáll a $t_{ACBD} = t_1 + t_2 + \cdots + t_{11} + t_{12}$ egyenlőség. Az $EFGH$ négyszög paralelogramma, mert egy-egy oldalpárja párhuzamos egy megfelelő adott szakasszal. Mint háromszögek középvonalai

$$\overline{EH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 21\ cm,\ \overline{HG} = \frac{1}{2}\overline{CD} = 29\ cm.$$

Tudjuk (ha nem a paralelogrammára, akkor a háromszögre vonatkozóan), hogy

$$t_{EFGH} = \overline{EH} \cdot \overline{HG} \cdot \sin\alpha = 21 \cdot 29 \cdot \sin\alpha.$$

A háromszögek középvonalainak és a paralelogramma átlóinak tulajdonságait felhasználjva adódik, hogy $t_1 = t_6 + t_7$, $t_2 = t_8 + t_9$, $t_3 = t_{10} + t_{11}$, $t_4 = t_5 + t_{12}$. Innen

$$t_{EFGH} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = t_5 + t_6 + \cdots + t_{12} = 21 \cdot 29 \cdot \sin\alpha.$$

Ennélfogva

$$t_{ACBD} = 2(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = 2 \cdot 21 \cdot 29 \cdot \sin\alpha.$$

Az ismert

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

képlet alapján (ha nem ismerjük, vezessük le) adódik, hogy

$$\sin\alpha = \frac{2 \cdot \frac{3}{7}}{1 + \frac{9}{49}} = \frac{21}{29}.$$

Végül $t_{ACBD} = 2 \cdot 21 \cdot 29 \cdot \frac{21}{29} = 2 \cdot 21^2 = 882\ cm^2$.